Discours et rapports mathématiques dans le *Théétète* de Platon

(147d-148b)

Turin, Mardi 19 mars 2013

Contrairement à certaines affirmations de commentateurs distingués, je vais essayer de vous montrer ici, au travers précisément du *Théétète*, l'importance des constructions mathématiques, généralement non explicités dans les textes anciens, pour la compréhension philosophique de ces textes, particulièrement ceux de Platon.

Le dialogue du *Théétète*, est un récit essentiellement à trois personnages. Outre Socrate, apparaissent un mathématicien, Théodore, et un apprenti-mathématicien, très jeune, Théétète dont le récit tient son titre éponyme. Le décor est ainsi planté pour un discours qui va tourner autour des mathématiques, d'où l'importance qu'y tient le relativement court passage que l'on nomme 'la partie mathématique', un peu moins de deux pages Estienne (147d-148b).

L’importance de ces deux pages est en effet considérable. Ce sont elles qui servent de fondement aux historiens des mathématiques pour toute reconstitution de l’origine de l’irrationalité en Grèce ancienne et des connaissances mathématiques avant Euclide. C’est en effet le plus ancien texte portant sur les mathématiques grecques, aussi bien du point de vue théorique que pratique.

Il faut tout d’abord expliquer cette partie mathématique qui pour diverses raisons a été mal comprise, et plus généralement revenir sur l’origine de l’irrationalité dans les mathématiques grecques anciennes qui est l’objet de cette partie.

Première Partie : L'origine de l'irrationalité en Grèce ancienne.

A. Mathématiques et définition.

Définitions.

1. Deux grandeurs a et b sont *commensurables*, si leur rapport est égal au rapport de deux entiers i.e. s'il existe deux entiers m et n tels que $a/b = m/n$. Dans le cas contraire, a et b sont dites *incommensurables*.
2. Soit fixée une unité. Une grandeur a est dite *rationnelle* si elle est commensurable avec cette unité. Dans le cas contraire, elle est dite *irrationnelle*. Autrement dit a est rationnelle, s'il existe deux entiers m et n tels que $a/1 = m/n$.

Si le sens mathématique de ces termes ne fait pas problème, il en va différemment pour leur sens usuel.

Le terme grec pour commensurable est σύμμετρος ou ξυμμετρος a aussi le sens de ‘semblable’, ‘symétrique’, ‘convenable’.
Celui pour ‘rationnel’ est ‘λόγος’ qui est particulièrement polysémique. Il signifie à la fois ‘parole’, ‘discours’, ‘exemple’, ‘argument’, ‘discussion’, ‘récit’, ‘définition’, ‘raison’, ‘intelligence’, ‘fondement’, ‘justification’, ‘explication’, ‘relation’, ‘proportion’, ‘analogie’. Un terme synonyme en mathématique est ‘ῥητος’, avec toutefois une exception : chez Euclide, ces deux termes ont des sens distincts, mais cela n’est vrai ni chez ses prédécesseurs, ni ses successeurs
En langage usuel ‘ῥητος’ signifie aussi ‘exprimé’, ‘fixé’, ‘ce qu’on peut dire’, ‘ce qui est raisonnable’.

La multiplicité de sens et la profonde intrication dans les textes de Platon entre philosophie et mathématiques, rend extrêmement difficile leur traduction (cf. par exemple *République* 546b-d, *Théétète* 146a où dans les deux textes, le terme προσήγορα apparaît). Une question s’avère particulièrement pertinente pour nous : quand rendre un terme grec par un unique terme français et en outre, faut-il le faire ?

Pour comprendre la partie mathématique du Théétète portant sur l'irrationalité mathématique i.e. sur l'existence de grandeurs non commensurables entre elles, il nous faut tout d'abord nous intéresser à ce qu'on appelle la découverte de ces grandeurs. Le *Théétète* ne porte pas, comme on le verra sur l'origine même, et pour en donner une reconstitution, il faut se tourner vers un autre ouvrage, celui d'Aristote, les *Premiers Analytiques*. S'il est postérieur au Théétète, on a quelques lignes qui abordent, très brièvement cette question, et c'est à partir d'elle que les historiens tentent de comprendre le premier raisonnement qui a amené les mathématiciens grecs à envisager l'existence des grandeurs irrationnelles.

Contrairement à ce qu'affirment d'importants interprètes de Platon[1], les démonstrations qui sont à l'œuvre dans les parties mathématiques n'ont pas un simple intérêt de curiosité mathématique sans conséquences pour la compréhension des ouvrages de philosophie. Elles jouent bien au contraire un rôle essentiel dans l'interprétation et en conséquence pour la traduction de ces livres. La difficulté ici étant la recherche de traductions *ad hoc* pour justifier une thèse mathématique présumée. Une autre difficulté étant le grand nombre de preuves possibles, qui peuvent se compter par dizaines pour celles concernant l'irrationalité.

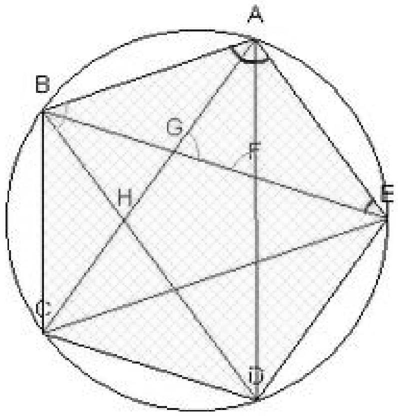
On pourrait donc penser que, suivant l'opinion de ces interprètes, c'est un jeu quelque peu stérile de déterminer cette preuve, vu le nombre des possibles et l'absence de textes mathématiques donnant ces preuves.

Mais, contrairement à cette opinion, le problème n'est pas la difficulté de choisir parmi la multiplicité des démonstrations, mais bien au contraire d'en trouver une en accord avec les quelques témoignages écrits que nous avons.

[1] Ainsi Myles Burnyeat et son commentaire sur la partie mathématique du *Théétète*, The philosophical sense of *Theaetetus*' Mathematics, *ISIS*, 1978, 69, n° 249, p. 489-513, p. 505. La question de la démonstration est pourtant essentielle dans la réfutation qu'il présente de la thèse de W. Knorr, rajoutée il est vrai, après qu'il ait écrit son article, en note, lors de la correction des épreuves.

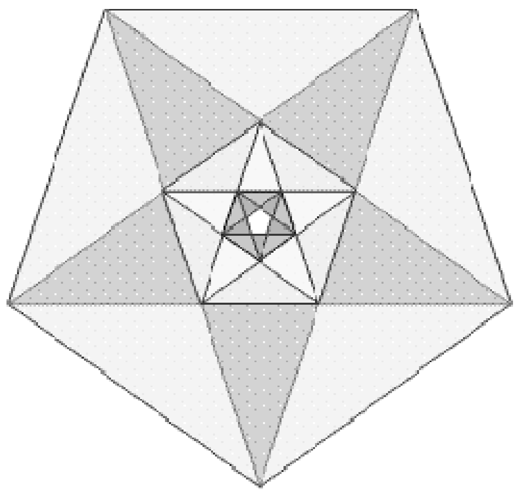
B. L’existence d’une grandeur irrationnelle : la figure du pentagone (convexe régulier).

Certains historiens considèrent que l’objet géométrique origine de l’irrationalité est le pentagone régulier (convexe), d’autant que, suivant la tradition, c’était un symbole pythagoricien.

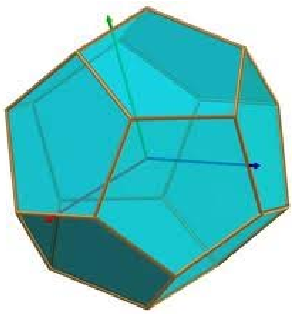


Quelle que soit la longueur des côtés du pentagone, le rapport de la ‘diagonale’ AC au côté AB est constant (égal a $(1+\sqrt{5})/2$ i.e. ce qu’on appelle aussi le ‘nombre d’or).

Cette thèse s'appuie sur l'inscription naturelle du pentagramme dans le pentagone régulier, conduisant à une suite infinie de figures de longueurs (strictement) décroissantes mais de rapport toujours constant.
En outre, suivant les propriétés géométriques du pentagone, si l'on peut choisir un pentagone en sorte que son côté et sa diagonale aient des valeurs entières, il en est de même de toute la suite des pentagones (cf. Annexe).



Cette figure intervient en outre dans l'étude du dodécaèdre qui suivant certains écrits (Jamblique, Proclus, scolie anonyme au livre 13 des *Éléments* d'Euclide) était l'un des solides réguliers construits par les Pythagoriciens anciens.

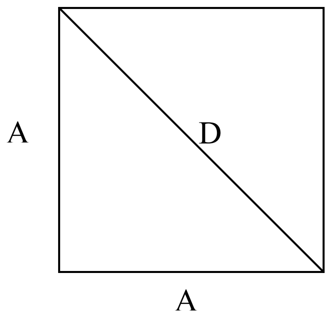


Toutefois cette thèse pose de nombreux problèmes. D'une part mathématiques, aucune trace de construction de type infini, comme celui que suppose cette figure, n'apparaît dans la géométrie grecque qui au contraire, tente d'éviter tout ce qui a trait à l'infini. Mais surtout, les textes les plus anciens que nous ayons, ceux de Platon et Aristote n'évoque jamais pour la question de l'irrationalité le pentagone, mais le carré et sa diagonale.

C. Le carré.

Comme nous l'avons vu, l'incommensurabilité consiste en l'existence de grandeurs dont le rapport ne peut être exprimé par celui de deux entiers. En termes modernes, cela s'exprime en disant qu'il n'est pas égal à ce que nous appelons un [nombre] rationnel.

Suivant les témoignages textuels, le premier cas connu d'incommensurabilité était un cas géométrique, celui de la diagonale du carré rapporté à son côté.
Suivant le théorème de Pythagore, le carré de la diagonale est égal au double du carré du côté. Dès lors dire que la diagonale est incommensurable au côté du carré signifie, en écriture moderne, que $\sqrt{2}$ est irrationnel.



$D^2 = A^2 + A^2 = 2\,A^2$

d'où : $D^2/A^2 = (D/A)^2 = 2$
i.e. $(D/A) = \sqrt{2}$

Une telle construction se trouve chez Platon, Socrate amenant un esclave à dupliquer la surface d'un carré en construisant le carré ayant pour côté la diagonale du premier carré (*Ménon*, 82e-83b).

D. Le texte fondateur.

Il ne s'agit pas d'**un** texte d'Aristote, mais de plusieurs, rédigés de manière analogue.
Le premier, celui auquel on se réfère généralement, est le suivant (dans la traduction de Tricot) :

'*On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les* ***nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs*** (τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις)*, si on posait la diagonale commensurable.*' (*Premiers Analytiques*, I, 23, 41a26-28).
Cette assertion est encore répétée un peu plus loin en 44, 50a37-38.

Et dans le *Théétète* de Platon cette fois, donne la même conclusion, sans toutefois la relier directement à l'irrationalité :

'τὰ περιττὰ ἄρτιά ἐστιν' ('les impairs sont pairs', 190b).

Nous n'allons pas rentrer dans les détails des démonstrations mathématiques. Disons simplement que la démonstration usuellement supposée, est la proposition numérotée 117 du livre X des *Éléments* d'Euclide.
Mais il y a un problème : la conclusion obtenue n'a rien à voir avec ce que dit Aristote. Pour essayer d'aplanir la difficulté, certains ont décidé de modifier la traduction.
On a un exemple ici où la méthode de preuve mathématique des historiens des sciences, modifie et la traduction, et le sens du texte.

Cela m'a conduit à donner une autre démonstration, en accord avec les témoignages textuels[2]. Ce dont avons besoin ici c'est une conséquence qui en suit facilement :
Soit n un entier ; s'il est divisible par 2 au plus un nombre impair de fois, alors sa racine carrée est irrationnelle. En notations modernes cela s'écrit :
Si $n = 2^k u$ avec k et u impairs alors $\sqrt{n}$ est irrationnel (ainsi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels mais pas $\sqrt{4} = 2$).
De là, et c'est l'essentiel pour nous, il suit que le problème de savoir si la racine carrée d'un entier est rationnel ou pas se ramène entièrement aux cas des entiers impairs.

[2] La référence complète est dans un article paru dans Philosophie antique, Une nouvelle démonstration de l'irrationalité de racine carrée de 2 d'après les *Analytiques* d'Aristote, *Philosophie antique*, 10, 2010, p. 81-138.

Deuxième Partie : La leçon mathématique du *Théétète*.

1. Présentation.

Le jeune Théétète commence son récit en rapportant une leçon donnée par le mathématicien Théodore à propos des carrés d'aire entier, et l'incommensurabilité avec l'unité de leurs côtés pour les aires de *3* pieds, *5* pieds, jusqu'à *17* pieds. En termes modernes, il s'agit de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{17}$.
Une première question concerne la suite étudiée par Théodore. D'après la première partie, la réponse est claire : ce sont les entiers impairs jusqu'à *17* (l'unité étant laissée de côté). La deuxième question est la méthode utilisée par Théodore, que Platon n'indique pas. Là encore, c'est celle utilisée à la proposition X.117 des Éléments d'Euclide qui est généralement retenue. Pourtant les mêmes objections peuvent lui être adressées que pour la démonstration d'irrationalité de $\sqrt{2}$. Mais cette fois une méthode différente a été proposée par l'historien Jean Itard, reprise par Wilburr Knorr, en se basant sur un résultat très ancien connu au moins des Pythagoriciens
En fait, la méthode qu'ils proposent n'est pas satisfaisante, et j'en ai donnée une autre, fondée sur ce même résultat de divisibilité.

Nous ne pouvons rentrer dans les détails, mais ce qui importe ici est la conséquence suivante : pour que la racine carrée d'un entier impair *n* soit rationnel, il faut que le reste de la division de *n* par *8* soit égal à *1*. Une autre manière de dire la même chose est que si le reste de la division de n par 8 n'est pas égal à 1, alors sa racine carrée est irrationnelle.

On en déduit aussitôt que, en notations modernes, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$ *et* $\sqrt{15}$ sont irrationnelles ; $\sqrt{9} = 3$ est entière donc rationnelle. Enfin $\sqrt{17}$, on ne peut pas répondre, d'où l'arrêt en *17* sans explication de Théodore, mentionné avec étonnement par Théétète.

2. Le « résultat de Socrate le Jeune-Théétète ».

i) Rationnel et entier.

À la suite de ce cours, Théétète et un camarade, Socrate le Jeune, se réunissent pour le retravailler. Ils affirment alors que les côtés des carrés de surfaces des entiers non carrés parfaits sont incommensurables aux côtés des carrés de surfaces entiers carrés[3] parfaits (148b). Cela se traduit, en termes modernes, de la manière suivante :

‘Résultat de Socrate le Jeune-Théétète’ (ou plus brièvement ‘résultat de SlJ-Théétète’) :
La racine carrée d’un entier est rationnelle si et seulement si cet entier est un carré parfait.

Si vous deviez retenir une chose mathématique de cet exposé ce serait la remarque suivante :
Remarque. Il faut souligner, car la confusion a été faite, que le ‘résultat de SlJ-Théétète’ est tout à fait différent du suivant :
La racine carrée d’un entier n *est un entier si et seulement si* n *est un carré parfait.*

[3] Un ‘carré parfait’ est le carré d’un entier, ainsi *9* est un carré parfait, car $9 = 3^2$.

En effet, ce dernier énoncé qui s'écrit :
$\sqrt{n} = N$ équivaut à : $n = N^2$
est une pure trivialité qui résulte de la définition même de la racine carrée (ou en termes géométriques de la définition de la surface d'un carré en fonction de ses côtés).

Au contraire, le 'résultat de SlJ-Théétète' consiste à montrer l'équivalence :
$\sqrt{n} = p/q$ (où p et q sont des entiers) équivaut à : il existe un entier r tel que $n = r^2$
ou encore, sa contraposée, permettant de préparer une démonstration par l'absurde :
l'entier n n'est pas un carré parfait si et seulement si **quels que soient les entiers *p* et *q***, il est impossible que l'on ait[4] : $\sqrt{n} = p/q$ *ou encore* $nq^2 = p^2$.

[4] En fait dans les deux cas, ce qui importe est l'implication qui va de gauche à droite. Il s'agit dans le premier cas de :
$\sqrt{n}$ est rationnel implique l'existence d'un entier r tel que $n = r^2$ (en effet l'implication inverse est triviale puisque si $n = r^2$, la racine carrée de n est r donc entière et donc a fortiori rationnelle).
Et dans le second cas (la contraposée), cela revient à :
Si l'entier n n'est pas un carré parfait alors il n'existe pas d'entiers p et q tels que l'on ait : $\sqrt{n} = p/q$.
Et bien sûr la réciproque est évidente puisqu'elle signifie que s'il n'existe pas d'entiers p et q tels que l'on ait : $\sqrt{n} = p/q$ (donc tels que $n = p^2/q^2$), alors n n'est pas un carré parfait (ce qui suppose outre l'existence de ces entiers *p et q*, que l'on puisse choisir $q = 1$).

ii) Un résultat sans preuve.

Le problème dans lequel nous plonge Platon est le suivant : ce résultat, essentiel pour la mathématique grecque, a bien été, suivant la tradition démontré par Théétète (seul), mais plus tard, alors qu'il était devenu un mathématicien reconnu. Il est donc impossible que Socrate le Jeune et Théétète l'aient démontré. Plus encore, dans le récit de Théétète, rien n'indique que les 2 enfants considèrent qu'ils ont obtenu là un résultat, *a fortiori* qu'une démonstration soit nécessaire. Cet énoncé, qui est énoncé comme allant de soi sans la moindre justification, n'empêche pas que beaucoup y voient un hommage rendu par Platon à Théétète (une amnésie recouvrant par ailleurs Socrate le Jeune).
Pourtant la lecture littérale du texte conduit au contraire à une critique des mathématiques exposées par Théétète et par conséquent, de son maître qui les lui enseigne, Théodore, l'ami du sophiste Protagoras.

3. Les 'δυνάμεις' (les 'puissances')**.**

i) L'emploi des 'δυνάμεις**' (les 'puissances').**

L'interprétation du terme **'**δυνάμεις' (pluriel de 'δύναμις') a fait couler un flot énorme de littérature dans la période moderne. Il s'agit de choisir entre le sens usuel dans la littérature et les mathématiques grecques, et celui que l'on ne retrouve nulle part en dehors de ce texte du *Théétète*, de 'racine carrée'. Ce mot apparaît quatre fois dans le récit, et à la quatrième occurrence, le sens de 'racine carrée' est incontestable.
Mais ce qui va nous intéresser ici n'est pas la recherche du ou des sens de **'**δυνάμεις' (le terme apparaissant toujours au pluriel), mais son emploi lorsque précisément il ne fait pas de doute, à la fin du récit (en 148a9) où Théétète définit les 'puissances' ('δυνάμεις').

Cette ligne (148a9) est particulièrement intrigante.
En effet, Théétète oppose 'δυνάμεις', un pluriel, à 'μῆκος' ('**longueur**') un singulier. La raison en est, dit-il, que les '**puissances**' ne sont pas commensurables '**en longueur**' ('μέκει') à la '**longueur**'. Si cette construction vous paraît aberrante, elle l'est tout aussi bien en grec.

Que Platon mette dans la bouche de Théétète une construction aussi maladroite, aussi bien du point de vue mathématique que syntaxique, n'est pas facilement compatible avec la thèse d'un hommage rendu à un grand mathématicien, à l'occasion de sa mort.
Que Théétète définisse un pluriel, donc une multitude, montre que l'on n'est pas dans le cadre de la recherche proposé par Socrate. Alors que pour celui-ci il s'agit de savoir ce qu'est **la** science, Théétète et Socrate le jeune recherchent ce que sont **les** 'puissances'. Et s'ils parviennent à énoncer ce que nous avons appelé le « résultat de Socrate le jeune-Théétète », c'est par **accident**, parce qu'ils n'ont pas compris pourquoi Théodore, sans s'explication, s'était arrêté à 17.

ii) **‘δυνάμεις’ ou** ‘δυνάμει’.

À ces difficultés, s’en ajoute encore une autre : le sens que Socrate le jeune et Théétète donnent à ces termes n’est pas le même ni de celui des mathématiciens, ni du langage usuel.
Une ‘longueur’ en effet, que ce soit en grec ancien, en français ou en italien, ne se réduit absolument pas au cadre rationnel, c’est ‘n’importe quelle’ longueur.
Et Platon nous le fait bien remarquer dans le second emploi de ‘μῆκος’ au datif (**‘**ὡ̃ς μήκει**’**, ‘en longueur’) : deux lignes sont en effet ‘commensurables’ ou ‘incommensurables’ **‘**ὡ̃ς μήκει**’**, ‘en longueur’.
Or, outre un pluriel au lieu d’un singulier, c’est précisément l’autre problème de l’emploi de **‘**δύναμις**’** (‘puissance’). En effet, dans les mathématiques grecques, le terme **‘**δύναμις**’** est pratiquement toujours employé sous la forme d’un datif, ‘δυνάμει’ (‘en puissance’). Dans les *Éléments* d’Euclide par exemple, **‘**δύναμις**’** n’est jamais utilisé pour un objet mathématique. Par exemple à la définition 2 du livre X, on lit :
‘Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν…’ i.e. ‘des lignes droites sont **commensurables au carré**…’ (ce qui signifie que le carré des longueurs des [segments de] droites sont commensurables entre eux).

4. ‘δυνάμεις’ et ‘λόγοι’.

i) Union et division.

En passant du datif au nominatif, Théétète et Socrate le jeune, passent du contexte relationnel (‘être commensurable/incommensurable en puissance’) à un contexte objectif (‘les longueurs/les puissances’). Alors que ‘en puissance’ relie des termes (ce sont des quantités qui sont ‘en puissance’ commensurables ou incommensurables), ‘les puissances’, telles que données par Théétète, divisent entre ce qui est commensurable aux entiers et ce qui ne l’est pas.

C’est précisément l’inverse qui est souligné dans l’*Épinomis*, un ouvrage qui n’est sans doute pas de Platon mais reflète la réflexion mathématique à l’intérieur de l’Académie, le cercle de Platon. La géométrie y dit-on produit une ‘merveille non-humaine, mais vraiment divine à qui pourra la concevoir’ (990d), à savoir rendre commensurable ce qui ne l’est pas. On retrouve un modèle interprétatif analogue dans la *République* ou le *Timée* par exemple.

ii) Moyenne géométrique et ordre du monde.

Mais pour comprendre ces textes, il faut revenir à la ‘moyenne géométrique’ sur laquelle repose l’ordre du monde (le ‘cosmos’, *Gorgias*, 508a). En effet, à s’en tenir aux entiers, il est impossible, en général, de lier deux nombres m et n au moyen d’une ‘égalité géométrique’, c’est-à-dire en sorte qu’on ait un troisième terme p tel que :

$m/p = p/n$.

Cela n’est vrai que dans des cas très particuliers pour les entiers m et n.

Au contraire les ‘puissances’ de Théétète rendent, dit l’auteur de l’*Épinomis*, possible (‘commensurable’) ce qui en l’était pas. En termes modernes, la moyenne géométrique de m et n est $p = \sqrt{(mn)}$.

iii) **Le ‘*logos alogos*’.**

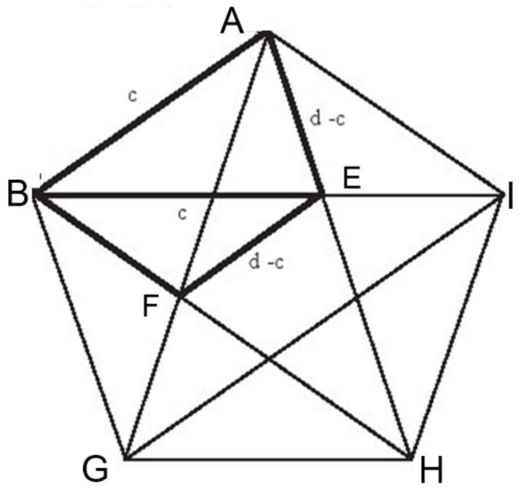
Que veut donc exprimer Platon en soulignant cette déficience de Théétète, donc indirectement Théodore, par rapport à la pratique usuelle des mathématiciens ? Théétète se fixe sur les seuls objets en négligeant leurs rapports, le monde devient une série discontinue d’éléments isolés. Le problème est que tout discours (‘λόγος’) établit nécessairement des rapports (‘λόγοι’), et un énoncé (‘λόγος’) sans justifications (‘λόγοι’) est un ‘λόγος ἄλογος’.
Ainsi, ce que nous avons appelé le « résultat de Socrate le Jeune-Théétète », est un tel ‘λόγος ἄλογος’, ce qu’on peut aussi traduire par un ‘discours sans paroles’.

iii) **Du ‘*logos alogos*’ au ‘*logos*’.**

C’est précisément ce que Théodore en 165a2 se flatte d’avoir fait, abandonné les ‘λόγοι’ au profit de la géométrie. Mais que reste-t-il de la géométrie, si on en exclut les justifications ? Une seule chose, les dessins qui vont servir de justifications. D’où la définition de Théétète, extrêmement étrange pour un mathématicien, identifiant la science, donc les mathématiques, à l’expérience sensible (‘αἴσθησις’, 151e4). Toute l’épreuve à laquelle se livre Socrate consiste à réintroduire le ‘λόγος’ dans le discours de Théétète. Et lorsqu’enfin Théétète, avec réticence, s’y résigne, Socrate peut s’éclipser non sans souligner la polysémie de ce terme, et réfuter la dernière définition ‘rêvée’ de Théétète.
C’est que Socrate et Théétète (ou encore Théodore) s’ils parlent le grec, ne se comprennent sans doute pas.

ANNEXE.

Relation entre la diagonale du pentagone inscrit dans un pentagone et les côté et diagonale de ce pentagone :



i) Le segment FE est parallèle au côté AB, cela résulte immédiatement des propriétés d'une parallèle (car le triangle EFH est isocèle).

ii) Le triangle FEA est isocèle (en effet, FE est parallèle à AB donc à GI et l'angle AFE est donc égal à AGI donc à GAH).

iii) Le triangle AEB est isocèle (ici on utilise que la figure est un pentagone régulier). L'arc de cercle circonscrit par l'angle ABE est 1/5 du cercle (i.e. égal à 2/5 droit), tandis que celui circonscrit pas BAE est 2/5 du cercle (i.e. égal à 4/5 droit), l'angle BEA est donc égal à 2 droits- 6/5 droit = 4/5 droit, d'où angle BEA = angle BAE et le triangle BEA est donc isocèle. On a donc : BE = BA = c, et EF = EI = d-c CQFD.